Algoritmi e Strutture Dati

Alberi di ricerca

Basato su materiale di C. Demetrescu, I. Finocchi, G.F. Italiano

Dizionari

- Gli alberi di ricerca sono usati per realizzare in modo efficiente il tipo di dato dizionario

tipo `Dizionario`:
dati: un insieme S di coppie $(elem, chiave)$
operazioni:

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$
aggiunge a S una nuova coppia (e, k)

`delete`$(elem\ e)$
cancella da S l'elemento e

`search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$
se la chiave k è presente in S restituisce un elemento e ad essa associato, e `null` altrimenti

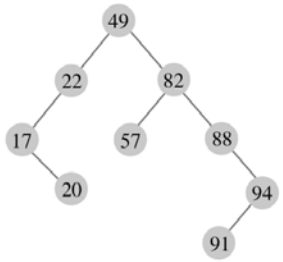
Alberi binari di ricerca
(BST = binary search tree)

Definizione

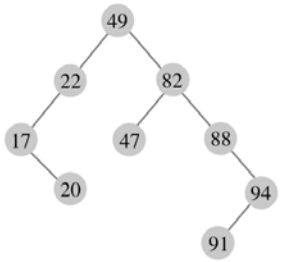
Albero binario che soddisfa le seguenti proprietà

- ogni nodo *v* contiene un elemento elem(v) cui è associata una chiave chiave(v) presa da un dominio totalmente ordinato
- le chiavi nel sottoalbero sinistro di v sono ≤ chiave(*v*)
- le chiavi nel sottoalbero destro di v sono ≥ chiave(*v*)

Esempi



Albero binario di ricerca



Albero binario non di ricerca

search(chiave k) -> elem

Traccia un cammino nell'albero partendo dalla radice:

- su ogni nodo, usa la proprietà di ricerca per decidere se proseguire nel sottoalbero sinistro o destro

algoritmo `search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$
1. $v \leftarrow$ radice di T
2. **while** ($v \neq$ `null`) **do**
3. **if** ($k = chiave(v)$) **then return** $elem(v)$
4. **else if** ($k < chiave(v)$) **then** $v \leftarrow$ figlio sinistro di v
5. **else** $v \leftarrow$ figlio destro di v
6. **return** `null`

insert(elem e, chiave k)

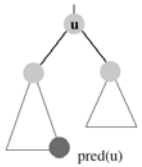
1. Crea un nuovo nodo *u* con *elem=e* e *chiave=k*
2. Cerca la chiave *k* nell'albero, identificando così il nodo *v* che diventerà padre di *u*
3. Appendi *u* come figlio sinistro/destro di *v* in modo che sia mantenuta la proprietà di ricerca

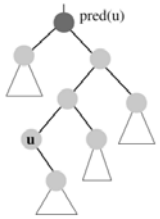
Ricerca del massimo

algoritmo `max`$(nodo\ u) \rightarrow nodo$
1. $v \leftarrow u$
2. **while** (figlio destro di $v \neq$ `null`) **do**
3. $v \leftarrow$ figlio destro di v
4. **return** v

Ricerca del predecessore

algoritmo `pred`$(nodo\ u) \rightarrow nodo$
1. **if** (u ha figlio sinistro $sin(u)$) **then**
2. **return** `max`$(sin(u))$
3. **while** ($parent(u) \neq null$ e u è figlio sinistro di suo padre) **do**
4. $u \leftarrow parent(u)$
5. **return** $parent(u)$



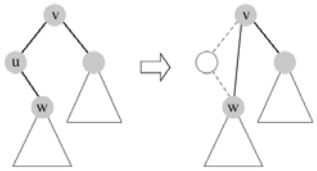


delete(elem e)

Sia *u* il nodo contenente l'elemento *e* da cancellare:

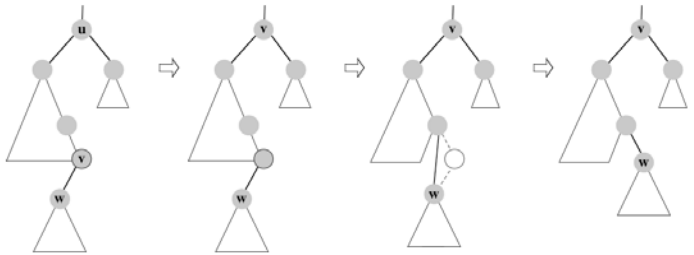
1) *u* è una foglia: rimuovila

2) *u* ha un solo figlio:



delete(elem e)

3) *u* ha due figli: sostituiscilo con il predecessore (*v*) e rimuovi fisicamente il predecessore (che ha un solo figlio)



Costo delle operazioni

- Tutte le operazioni hanno costo O(h) dove h è l'altezza dell'albero
- O(n) nel caso peggiore (alberi molto sbilanciati e profondi)

Alberi AVL
(Adel'son-Vel'skii e Landis)

Definizioni

Fattore di bilanciamento di un nodo v =
| altezza del sottoalbero sinistro di v - altezza del sottoalbero destro di v **|**

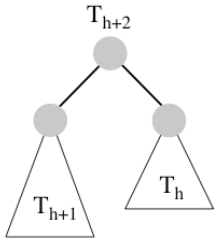
Un albero si dice bilanciato in altezza se ogni nodo v ha fattore di bilanciamento ≤ 1

Alberi AVL = alberi binari di ricerca bilanciati in altezza

Altezza di alberi AVL

Si può dimostrare che un albero AVL con n nodi ha **altezza O(log n)**

Idea della dimostrazione: considerare, tra tutti gli AVL di altezza *h*, quelli con il minimo numero di nodi n_h (alberi di Fibonacci)



Si ha: $n_h=1+n_{h-1}+n_{h-2}=F_{h+3}-1$

Implementazione delle operazioni

- L'operazione *search* procede come in un BST
- Ma inserimenti e cancellazioni potrebbero sbilanciare l'albero
- Manteniamo il bilanciamento tramite opportune rotazioni

Rotazione di base

Ribilanciamento tramite rotazioni

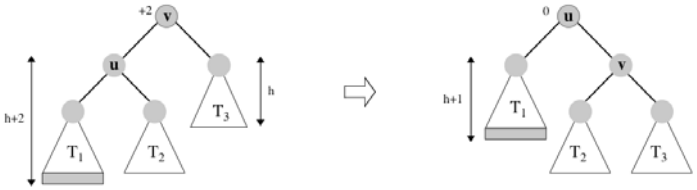
- Le rotazioni sono effettuate su nodi sbilanciati
- Sia v un nodo con fattore di bilanciamento ≥ 2
- Esiste un sottoalbero T di v che lo sbilancia
- A seconda della posizione di T si hanno 4 casi:

Sinistra - sinistra	(SS)	T è il sottoalbero sinistro del figlio sinistro di v
Destra - destra	(DD)	T è il sottoalbero destro del figlio destro di v
Sinistra - destra	(SD)	T è il sottoalbero destro del figlio sinistro di v
Destra - sinistra	(DS)	T è il sottoalbero sinistro del figlio destro di v

- I quattro casi sono simmetrici a coppie

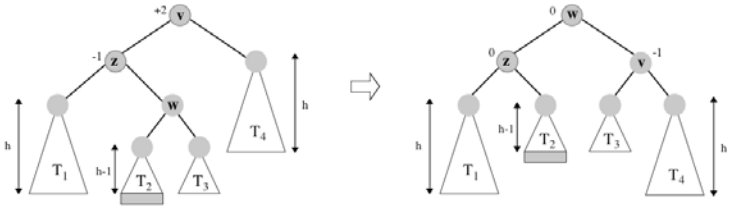
Rotazione SS

- Applicare una rotazione semplice verso destra su v
- L'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione passa da h+3 a h+2



Rotazione SD

- Applicare due rotazioni semplici: una sul figlio del nodo critico, l'altra sul nodo critico
- L'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione passa da h+3 a h+2



insert(elem e, chiave k)

1. Crea un nuovo nodo *u* con *elem=e* e *chiave=k*
2. Inserisci *u* come in un BST
3. Ricalcola i fattori di bilanciamento dei nodi nel cammino dalla radice a *u*:

   sia *v* il nodo più profondo con fattore di bilanciamento pari a ±2 (nodo critico)
4. Esegui una rotazione opportuna su *v*

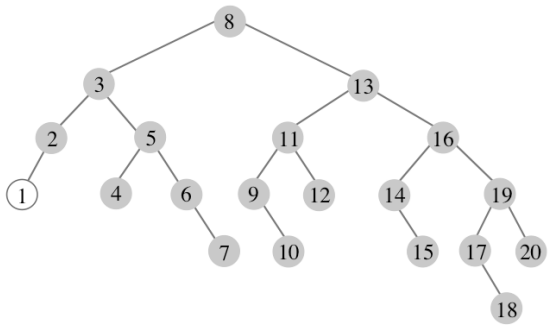
Oss.: una sola rotazione è sufficiente, poiché l'altezza dell'albero coinvolto diminuisce di 1

delete(elem e)

1. Cancella il nodo come in un BST
2. Ricalcola i fattori di bilanciamento dei nodi nel cammino dalla radice al padre del nodo eliminato
   - che potrebbe essere il predecessore del nodo contenente *e*
3. Ripercorrendo il cammino dal basso verso l'alto, esegui l'opportuna rotazione sui nodi sbilanciati

Oss.: potrebbero essere necessarie O(log n) rotazioni

Cancellazione con rotazioni a cascata



Classe AlberoAVL

classe `AlberoAVL` **estende** `AlberoBinarioDiRicerca`:
dati: $S(n) = O(n)$
albero binario di ricerca T ereditato, più il fattore di bilanciamento di ogni nodo.

operazioni:

`search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$ $T(n) = O(\log n)$
ereditata.

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$ $T(n) = O(\log n)$
chiama `insert`() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(1)$ rotazioni.

`delete`$(elem\ e)$ $T(n) = O(\log n)$
chiama `delete`() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(\log n)$ rotazioni.

Costo delle operazioni

Tutte le operazioni hanno costo O(log n)

- l'altezza dell'albero è O(log n)
- ciascuna rotazione richiede solo tempo costante

Riepilogo

- Mantenere il bilanciamento sembra cruciale per ottenere buone prestazioni
- Esistono vari approcci per mantenere il bilanciamento:
  - Tramite rotazioni
  - Tramite fusioni o separazioni di nodi (alberi 2-3, B-alberi)
- In tutti questi casi si ottengono tempi di esecuzione logaritmici nel caso peggiore
- E' anche possibile ottenere tempi logaritmici *ammortizzati* su sequenze di operazioni, senza imporre una condizione stretta di bilanciamento
  - alberi auto-aggiustanti